23/11/16

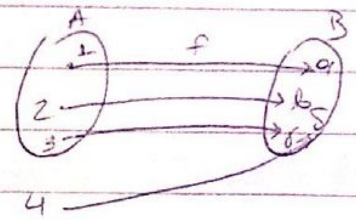
$f: A \to B$ συνάρτηση

$R(f) = \{y \in B : \exists x \in A$ με $f(x) = y\}$

$B^A = \{f : A \to B\}$

* Περιορισμός της f στο $S \subseteq A$: $f_S = \{(x, f(x)),\ x \in S\}$

* g επέκταση της f στο G με $G \supseteq A$: $g/A = f = [g(x) = f(x)\ \forall x \in A]$



* f σταθερή συνάρτηση $f = \{(x, c) : x \in A\}$

ταυτοτική: $f(x) = x\ \forall x \in A$, $f = \Delta$ $i_A = \{(x, x), x \in A\}$

* f 1-1 $\iff$ $xfz \wedge yfz \Rightarrow x = y$ ή $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$D_{gof} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$ // $gof \neq fog$ // $f_3 o f_2 o f_1$

$f: A \to B$ f: 1-1 και επί → $f^{-1}: A \to B$ συνάρτηση
→ f^{-1}: 1-1 και επί

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ας είναι $f: A \to B$, $g: \Gamma \to \Delta$ συναρτήσεις.

i) Αν οι f, g είναι 1-1, τότε και η gof είναι 1-1

ii) Αν $B = \Gamma$ και οι f, g είναι επί, τότε και η gof είναι επί (A|

iii) Αν $B = \Gamma$ και f, g: 1-1 και επί τότε η gof είναι 1-1 και επί και $(gof)^{-1} = f^{-1} o g^{-1}$

Απόδειξη: i) Υποθ. ότι οι f, g είναι 1-1 και ότι $D_{g\circ f} \neq \emptyset$.
Ας είναι $x, y \in D_{g\circ f}$ με $g\circ f(x) = (g\circ f)(y)$ τότε

$$g(f\circ g) = g(f(x)) \xrightarrow{g\ 1-1} f(x) = f(y)$$
$$\xrightarrow{f\ 1-1} x = y$$

ii) f επί $\Rightarrow f(A) = B$

g επί $\Rightarrow g(\Gamma) = \Delta \xrightarrow{B=\Gamma} g(B) = \Delta \Rightarrow g(f(A)) = \Delta$
$\Rightarrow g\circ f(A) = \Delta$

iii) Από των (i) κ (ii) έπεται ότι η $g\circ f$ είναι 1-1 και ε
επομένως η $(g\circ f)^{-1}$ είναι συνάρτηση

$(g\circ f)^{-1} : \Delta \to A$. Επίσης οι g^{-1} f^{-1} είναι συνα
Ας είναι $y \in \Delta$ με $(g\circ f)^{-1}(y) = x \in A$

$y = (g\circ f)(x) = g(f(x)) \Rightarrow g^{-1}(y) = f(x) \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(y$
$\Rightarrow (f^{-1}\circ g^{-1})(y) = x$ (II)

Δηλ. $\forall x \in A$ $(g\circ f)^{-1}(y) = (f^{-1}\circ g^{-1})(y)$ άρα
$(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Αν $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} B$, τότε $f^{-1}\circ f =$;

$f^{-1}\circ f = i_A$

$f\circ f^{-1} = i_B$

Ας είναι $f: A \to B$ μια συνάρτηση και $X \subseteq A$. Καλούμε εικόνα του X μέσω της f το σύνολο

$$f(X) = \{y \in B : \exists x \in X \text{ με } f(x) = y\}$$

$$\left(\{f(x), x \in X\} \right)$$

- $f(X) \subseteq R(f)$

- $f(\phi) = \phi$

- $y \in f(X) \Rightarrow \exists x \in X : f(x) = y$

- $f(x) \neq f(\{x\})$

- $\{f(x)\} \subseteq f(\{x\})$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ας είναι $f: A \to B$ συνάρτηση, $X, Y \subseteq A$ τότε:

i) $X \subseteq Y \Rightarrow f(X) \subseteq f(Y)$

ii) $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$

iii) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

iv) $f(X) - f(Y) \subseteq f(X - Y)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: i) Υποθ. ότι $X \subseteq Y \subseteq A$

αν $X = \phi$, τότε $f(X) = f(\phi) = \phi \subseteq f(Y)$

Έστω ότι $X \neq \phi$ και $X \subseteq Y$

Ας είναι $y \in f(X)$. Θα αποδείξω ότι $y \in f(Y)$. Επειδή

$y \in f(X)$ $\exists x \in X : f(x) = y$. Όπως $x \in X \subseteq Y$

δηλ. $x \in Y \Rightarrow y = f(x) \in f(Y)$

άρα $y \in f(Y)$

iii) Είναι $X \subseteq X \cup Y \overset{(i)}{\Rightarrow} f(X) \subseteq f(X \cup Y)$

$Y \subseteq X \cup Y \Rightarrow f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$

άρα $f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$ (I)

Για $y \in f(X \cup Y) \Rightarrow \exists x \in X \cup Y : f(x) = y$ δηλ. $\exists x \in X$ $\vee$ $\exists x \in Y : f(x) = y$

$\Rightarrow y = f(x) \in f(X) \vee y = f(x) \in f(Y)$

άρα $y \in f(X) \cup f(Y)$

δηλ. $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$ (II)

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : \exists y \in Y : f(x) = y\}$$
$$= \{f^{-1}(x), y \in Y\}$$
$$= \{x \in A : f(x) \in Y\}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ας είναι $f : A \to B$, $X, Y \subseteq B$ τότε:

i) $X \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(X) \subseteq f^{-1}(Y)$

ii) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

iii) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

iv) $f^{-1}(X) - f^{-1}(Y) = f^{-1}(X - Y$

v) $F^{-1}(X^c) = [F(X)]^c$

Απόδειξη: (iv) Ας είναι $b \in f^{-1}(X) - f^{-1}(Y)$

Θα αποδείξω ότι $b \in f^{-1}(X-Y)$

$$b \in f^{-1}(X) - f^{-1}(Y)$$

$$\Rightarrow \exists\, y \in X \quad f(b) = y \wedge b \notin f^{-1}(Y)$$

$$\Rightarrow \exists\, y \in X \quad f(b) = y \wedge (f(b) \neq z \ \forall z \in Y)$$

$$z \neq y \ \forall z \in Y)$$

$$\Rightarrow \exists\, y \in X \cdot f(b) = b \,/\, z \neq y \ \forall z \in Y$$

$$\Rightarrow \exists\, y \in X - Y : f(y) = b$$

$$\Rightarrow b \in f^{-1}(X-Y)$$

$\Leftarrow$

Αντίστροφα, θα αποδ. ότι $f^{-1}(X-Y) = f^{-1}(X) - f^{-1}(Y)$

Ας είναι $a \in f^{-1}(X-Y)$ τότε $f(a) \in X - Y$

δηλ. $f(a) \in X$ κ $f(a) \notin Y$

άρα $f^{-1}(X$ κ $a \notin f^{-1}(Y)$

$$a \in f^{-1}(X) - f^{-1}(Y)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ας είναι $f: A \to B$ μια συνάρτηση. Τότε

i) $X \subseteq f^{-1}(f(X))$ $\forall X \subseteq A$ } (Η ισότητα ισχύει αν

ii) $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$ $\forall Y \subseteq B$ } f 1-1)

Απόδειξη: Ας είναι $X \subseteq A$. Αν $X = \emptyset$, τότε η σχέση ισχύει.

Υποθ. ότι $X \neq \emptyset$

Για $x \in X$ είναι $y = f(x) \in f(X)$

$\Rightarrow$ $x \in f^{-1}(f(X))$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ας είναι $f: A \to B$ μια συνάρτηση. Τότε:

i) Η f είναι 1-1 αν και μόνο αν: $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ $\forall X, Y \in P(A)$

ii) -||- επί —— || —— : $(f(X))^c = f(X^c)$ $\forall X \in$

Απόδειξη:

Ισχύει πάντα $f(X) \cap f(Y) \supseteq f(X \cap Y)$

Επομένως, αρκεί να αποδείξω ότι:

f 1-1 $\Leftrightarrow$ $f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y)$

Υποθ. ότι η f είναι 1-1 θα αποδ. $f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y)$

Ας είναι $b \in f(X) \cap f(Y)$ τότε $b \in f(X) \wedge b \in f(Y)$

$\exists x_1 \in X: f(x_1) = b \wedge \exists x_2 \in Y: f(x_2) = b$

δηλ. $f(x_1) = b = f(x_2)$, $x_1 \in X$, $x_2 \in Y$

άρα $\overset{(f\ 1\text{-}1)}{\Rightarrow}$ $x_1 = x_2 \Rightarrow x_1, x_2 \in X \cap Y$

$\Rightarrow b = f(x_1) \in f(X \cap Y)$

Αντίστροφα, υποθέτω ότι $f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y) \;\forall\, X, Y \subseteq A$

Θα αποδείξω ότι η f είναι 1-1

Ας είναι $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Υποθ. ότι $x_1 \neq x_2$

Τότε $X = \{x_1\}$, $Y = \{x_2\}$

$$f(\underbrace{\{x_1\}}_{X}) \cap f(\underbrace{\{x_2\}}_{Y}) \subseteq f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = f(\emptyset) = \emptyset$$

Δηλ. $f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = \emptyset$

$$\{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = \emptyset$$

$$\{\emptyset\} = \emptyset$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ας είναι $f: A \to B$ μια συνάρτηση. Τότε:

i) $f(X - Y) = f(X) - f(Y) \;\forall\, X, Y \in \mathcal{P}(A) \iff f$ 1-1

ii) $f(X_A^c) = [f(X)]_B^c \;\forall\, X \in \mathcal{P}(A) \iff f$ 1-1 και επί

iii) $f(f^{-1}(Y)) = Y \;\forall\, Y \in \mathcal{P}(B) \iff f$ επί

iv) $f^{-1}(f(X)) = X \;\forall\, X \in \mathcal{P}(A) \iff f$ 1-1